M O D E L O S   D E   I N V E N T A R I O

El objetivo de la teoría de modelos de inventario es determinar las reglas que pueden utilizar los encargados de gestión para minimizar los costos asociados al mantenimiento, pedido de compra u orden de fabricación de los productos, permitiendo al mismo tiempo, satisfacer la demanda del cliente.

Los modelos de inventario que estudiaremos pueden tener asociados los siguientes costos:

- ✓ Costo de compra o fabricación ($\mathbf{C_1}$)
- ✓ Costo de pedido u organización ($\mathbf{C_2}$)
- ✓ Costo de almacenamiento y / o conservación ($\mathbf{C_3}$)
- ✓ Costo por escasez o costo por agotamiento de existencias ($\mathbf{C_4}$).

Costo de compra o fabricación: Este costo está asociado con el valor que tiene para la empresa la compra de una unidad del bien ofrecido. Si trabajamos con un modelo de fabricación, este costo representaría lo que le cuesta a la empresa la producción de una unidad del producto, lo cual incluye tanto a los costos fijos como a los variables.

Costo de pedido u organización: Hace referencia a los costos que se ocasionan al hacer un pedido, por ejemplo: en el caso de un modelo de compras personal administrativo. En el caso de fabricación se puede pensar en el tiempo ocioso de maquinarias y personal que lleva la puesta en marcha de una producción, derivadas por ejemplo de la realización de muestras. Una característica que diferencia a este costo con los otros es que no se calcula por unidad de producto, es decir es independiente de la cantidad a pedir u ordenar.

Costo de almacenamiento: También es conocido como costo de retención o posesión, involucra los costos por almacenaje, seguros, y posibilidad de deterioro de los bienes por unidad. No obstante, una componente importante de esta estimación, es el costo de oportunidad[1] en el que se incurre al invertir capital en el inventario, sobre todo en épocas en las cuales la tasa de interés resulta alta.

Costo por escasez o por agotamiento de existencias: Este costo es más difícil de estimar que los anteriores y se expresa por unidad. Cuando se permite la escasez en los modelos de inventario surgen los pedidos diferidos, ante los cuales el cliente puede aceptar la demora en la entrega de los productos o cancelar el pedido realizado, ya que no le resulta conveniente una entrega tardía. En el primer caso hablamos de pedidos pendientes, los cuales originan costos adicionales; en el caso de un modelo de fabricación por ejemplo, se tendría que recurrir a fabricar en tiempo extra, por supuesto a mayores costos. Cuando el cliente cancela el pedido, hablamos de ventas perdidas. Las ventas pedidas generan costos difíciles de calcular en términos monetarios, pero afectan a la empresa; por ejemplo el cliente podría decidir comprar en otra empresa, baja la imagen de la empresa.

De acuerdo a las características de la demanda y el tiempo entre pedidos distinguimos entre dos tipos de modelos de inventario:

- ✓ *Modelos Determinísticos de Inventario*
- ✓ *Modelos Probabilísticos de Inventario.*

[1] "El costo de oportunidad del capital se obtiene teniendo en cuenta la tasa de retorno de la mejor inversión de riesgo similar que es desplazada como resultado de la decisión de ejecutar el proyecto en cuestión"

Modelos Determinísticos de Inventario: Este tipo de modelos asume que la demanda es conocida con certeza y a una razón constante U unidades por año. Con lo cual podemos calcular la demanda en período de t meses como D = U*t /12. También se asume que el plazo de entrega de los pedidos es constante y su magnitud conocida.

Los Modelos Determinísticos de Inventario que estudiaremos son:

- ✓ *Modelo de Compra*
- ✓ *Modelo de Fabricación*
- ✓ *Modelo de Compra con déficit*
- ✓ *Modelo de Fabricación con déficit*

Modelos Probabilísticos de Inventario: En estos casos, más cercanos a la realidad, la demanda y / o el tiempo entre pedidos pueden asumir una distribución probabilística.

Los modelos Probabilísticos de Inventario que examinaremos serán:

- ✓ *Sistema P*
- ✓ *Sistema Q*

MODELOS DETERMINÍSTICOS DE INVENTARIO

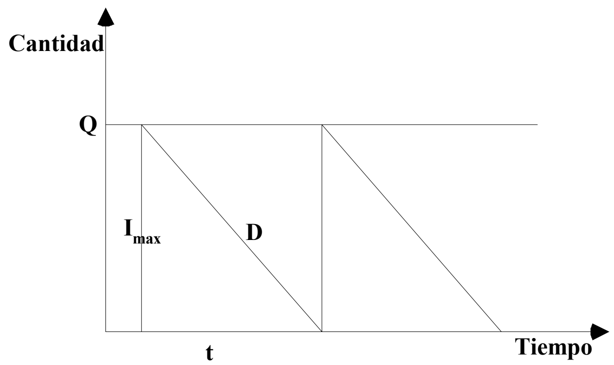
Modelo de Compras

Este modelo de inventario es el más sencillo y podría aplicarse a cualquier comercio, por ejemplo un supermercado pide a intervalos fijos una cantidad determinada de productos, en el momento que se agotan estos productos llega otra orden y así sucesivamente. La cantidad a pedir es una función de demanda determinística, el supermercadista no puede vender más unidades de las que tiene en existencia.

Los supuestos de este modelo son:

- ✓ La demanda es determinística y ocurre a tasa constante.
- ✓ El costo de ordenar un pedido no depende de la cantidad a pedir.
- ✓ El tiempo de espera de cada pedido es cero.
- ✓ No se permite escasez.

Gráfico de la cantidad comprada en existencia en función del tiempo



El costo total para un lote es:

Costo unitario + Costo ordenar la compra + Costo mantener el inventario

$$C` = C_1 * Q + C_2 + C_3 * \frac{I_{máx}}{2} * t$$

Por otra parte tenemos que:

$$n = \frac{D}{Q}, \quad t = \frac{Q}{D} \quad y \quad I_{máx} = Q$$ n expresa la cantidad de pedidos

Entonces en el año el costo total anual es:

$$\boxed{CTA = C`*n = C_1 * D + C_2 * \frac{D}{Q} + \frac{C_3 * Q}{2}}$$

Derivando respecto a Q:

$$\frac{\partial CTA}{\partial Q} = 0 \Rightarrow \frac{-C_2 * D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} = 0$$

El lote óptimo por pedido es:

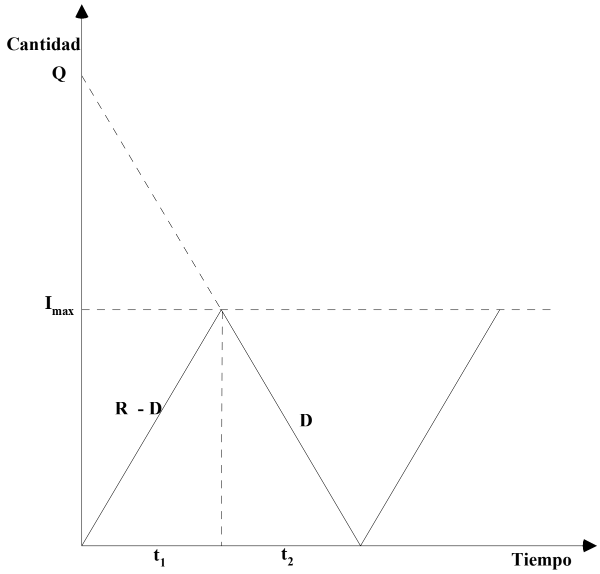
$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{(2 * C_2 * D)}{C_3}}}$$

Modelo de Fabricación o Producción

En este modelo, el empresario de dedica a la producción de un bien. Los supuestos de este modelo son:

- ✓ La demanda es determinística y ocurre a tasa constante.
- ✓ El costo de ordenar una producción no depende de la cantidad a fabricar.
- ✓ La empresa puede producir R unidades por unidad de tiempo. En cualquier instante la cantidad producida es R*t.
- ✓ No se permite escasez.

Gráfico de la evolución de la cantidad fabricada en función del tiempo



Del gráfico obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} I_{máx} &= t_1 * (R - D) \\ t_1 &= \frac{Q}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_{máx} = \frac{Q}{R} * (R - D) = Q * \left(1 - \frac{D}{R}\right)$$

$$t_1 + t_2 = \frac{Q}{D} \qquad n = \frac{D}{Q}$$

El costo total para un lote es

$$C' = C_1 * Q + C_2 * C_3 * \frac{I_{máx}}{2} * (t_1 + t_2)$$

reemplazando $I_{máx}$ y (t_1 + t2) obtenemos:

$$C' = C_1 * Q + C_2 * C_3 * \frac{Q * \left(1 - \frac{D}{R}\right)}{2} * \frac{Q}{D} = C_1 * Q + C_2 + C_3 * \frac{Q^2 * \left(1 - \frac{D}{R}\right)}{2 * D}$$

El costo total anual está dado por:

$$\boxed{CTA = C' * n = C_1 * D + C_2 * \frac{D}{Q} + C_3 * \frac{Q}{2} * \left(1 - \frac{D}{R}\right)}$$

Derivando respecto a Q e igualando a cero

$$\frac{\partial CTA}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow \frac{-C_2 * D}{Q^2} + \frac{C_3 * \left(1 - \frac{D}{R}\right)}{2} = 0$$

Luego, el lote óptimo por pedido queda determinado por:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{(2 * C_2 * D)}{C_3 * \left(1 - \frac{D}{R}\right)}}}$$

Modelo de Compras con Déficit

En este modelo trabajamos con la hipótesis de escasez, es la única condición que relajamos del modelo de compras anteriormente presentado. Si tomamos el ejemplo del supermercado, éste podría efectuar venta de productos aunque su stock sea 0, entregará esas mercaderías cuando llegue un nuevo pedido. Se establece el máximo déficit permitido como S unidades.

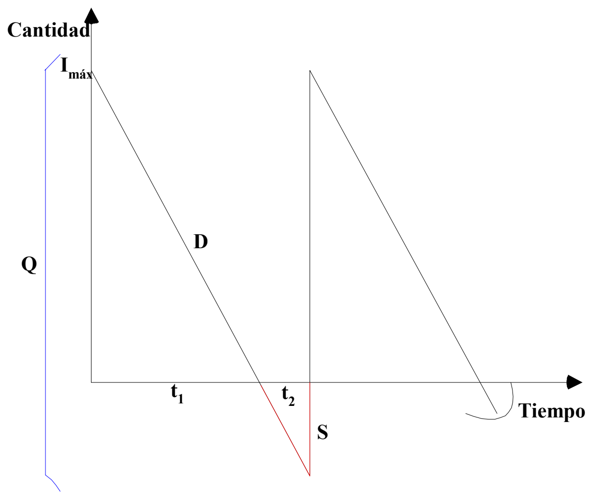
Es decir, en la realidad es muy común no poder satisfacer la demanda a tiempo; esto nos lleva a tener otros costos surgidos por pedidos especiales, fletes más rápidos, pérdida de la imagen de la empresa, etc. Todos ellos los denominaremos como *costos de déficit.*

t_1: tiempo en que hay disponibilidad de mercaderías

t_2: tiempo comprendido desde que se termina la disponibilidad de mercaderías hasta que llega un nuevo pedido, también llamado tiempo de déficit.

½ S es el promedio de unidades agotadas o faltantes por período

Gráfico de la evolución del inventario en el tiempo, permitiendo déficit.



$$\frac{t}{t_1} = \frac{Q}{I_{máx}} \qquad t_1 + t_2 = t = \frac{Q}{D} \qquad I_{máx} = Q - S$$

$$t_1 = \frac{I_{máx}}{Q} * t \quad reemplazando \quad t \quad y \quad I_{máx} \Rightarrow t_1 = \frac{(Q-S)}{D}$$

$$t_2 = \frac{S}{Q} * t \quad reemplazando \quad t \quad \Rightarrow t_2 = \frac{S}{D}$$

El costo de una orden de compra está dado por:

$$C` = C_1 * Q + C_2 + C_3 * \frac{I_{máx}}{2} * t_1 + C_4 * \frac{S}{2} * t_2$$

reemplazando $I_{máx}$, t_1 y t_2 obtenemos:

$$C` = C_1 * Q + C_2 + C_3 * \frac{(Q-S)^2}{2 * D} + C_4 * \frac{S^2}{2 * D}$$

El costo total anual es:

$$\boxed{CTA = C` * n = C_1 * D + C_2 \frac{D}{Q} + * \frac{C_3}{2} * Q - C_3 * S + \frac{(C_3 + C_4)}{2 * Q} S^2}$$

Derivando la fórmula anterior respecto a Q y a S:

$$\frac{\partial CTA}{\partial Q} = 0 \quad \Rightarrow -C_2 * \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} - \frac{(C3 + C4) * S^2}{2 * Q^2} = 0$$

$$\frac{\partial CTA}{\partial S} = 0 \quad \Rightarrow -C_3 + (C_3 + C_4) * \frac{S}{Q} = 0$$

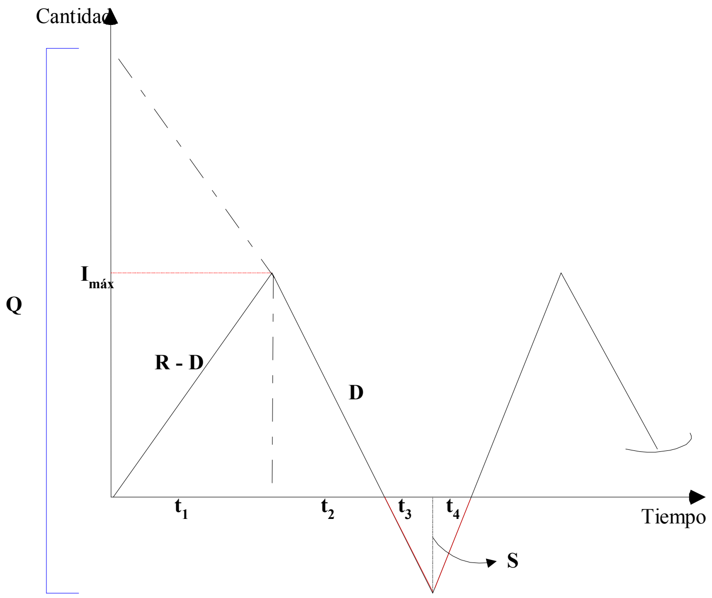
Resolviendo el sistema anterior de dos ecuaciones obtenemos:

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{2 * C_2 * D * (C_3 + C_4)}{C_3 * C_4}}}$$

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{2 * C_2 * D * C_3}{C_4 * (C_3 + C_4)}}}$$

Modelo de Fabricación con Déficit

A continuación vemos el gráfico correspondiente a este modelo:



Este modelo de fabricación admite déficit, con tasa de producción o fabricación mayor que la demanda.

t_1: tiempo desde que se comienza a fabricar hasta que se alcanza el inventario máximo

t_2: tiempo desde que se alcanzó el inventario máximo hasta que el mismo llega a cero.

t_3: tiempo desde el inventario en cero hasta que se llega al máximo déficit permitido

t_4: Tiempo desde el máximo déficit hasta que se logra saldar los pedidos pendientes.

Del gráfico obtenemos:

$$I_{máx} = t_1 * (R - D) \Rightarrow t_1 = \frac{I_{máx}}{R - D}$$

$$I_{máx} = t_2 * D \Rightarrow t_2 = \frac{I_{máx}}{D}$$

$$S = t_4 (R - D) \Rightarrow t_4 = \frac{S}{R - D}$$

$$S = t_3 * D \Rightarrow t_3 = \frac{S}{D}$$

$$t_1 + t_2 = \frac{I_{máx}}{R - D} + \frac{I_{máx}}{D} = I_{máx} * \left(\frac{1}{R - D} + \frac{1}{D} \right)$$

$$t_3 + t_4 = \frac{S}{D} + \frac{S}{R - D}$$

$$t_1 + t_4 = \frac{Q}{R}$$

$$I_{máx} + S = (t_1 + t_4) * (R - D) = \frac{Q}{R} * (R - D) = Q * \left(1 - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{R}} \right)$$

$$I_{máx} = Q * \left(1 - \frac{D}{R} \right) - S$$

El costo para un lote de fabricación con déficit está dado por:

$$C` = C_1 * Q + C_2 + C_3 * \frac{I_{máx}}{2} * (t_1 + t_2) + C_4 * S * (t_3 + t_4)$$

Reemplazando en la ecuación anterior los valores de $I_{máx}$, t_1, t_2, t_3, y t_4 obtenemos:

$$C' = C_1 * Q + C_2 + \frac{C_3}{2} * \left[Q * \left(1 - \frac{D}{R}\right) - S\right]^2 * \left[\frac{1}{(R - D)} + \frac{1}{D}\right] + \frac{C_4}{2} * S^2 * \left[\frac{1}{D} + \frac{1}{(R - D)}\right]$$

El costo total anual es:

$$\boxed{CTA = C' * n = C_1 * D + C_2 * \frac{D}{Q} + \frac{C_3}{2 * Q} * \left[Q * \left(1 - \frac{D}{R}\right) - S\right]^2 * \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{D}{R}\right)}\right] + \frac{C_4}{2 * Q} * S^2 * \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{D}{R}\right)}\right]}$$

Derivamos la ecuación anterior respecto de Q:

$$\frac{\partial CTA}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -C_2 * \frac{D}{Q^2} + \frac{C_3}{2} * \left(1 - \frac{D}{R}\right) - \frac{C_3 S^2}{2 * Q^2 + \left(1 - \frac{D}{R}\right)} - \frac{C_4 S^2}{2 * Q^2 * \left(1 - \frac{D}{R}\right)} = 0$$

y luego respecto de S:

$$\frac{\partial CTA}{\partial S} = 0 \Rightarrow C_3 + \frac{C_3 * S}{Q * \left(1 - \frac{D}{R}\right)} + \frac{C_4 * S}{Q * \left(1 - \frac{D}{R}\right)} = 0$$

El lote óptimo y el déficit lo hallamos resolviendo el sistema de las dos ecuaciones precedentes.

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{2 * C_2 * D * (C_3 + C_4)}{\left(1 - \frac{D}{R}\right) * C_3 * C_4}}}$$

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{2 * C_2 * D * C_3}{C_4 * (C_3 + C_4)}} * \sqrt{1 - \frac{D}{R}}}$$