Investigación Operativa I

Programación Lineal

invop.alumnos.exa.unicen.edu.ar

illescas@exa.unicen.edu.ar

Dr. Gustavo Illescas

INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN
EN TECNOLOGÍA
INFORMÁTICA AVANZADA

Informática de Gestión

Agenda

- Introducción: Programación Lineal
- Sistema de inecuaciones lineales
- Problemas de optimización de una función sujeta a restricciones
- Ejemplo
  - Lectura del enunciado
  - Construcción del modelo matemático
  - Solución Gráfica
    - Solución óptima
  - Solución Algebraica
- Casos Extremos
- TRABAJOS PRACTICOS ESPECIALES

Programación Lineal (PL)

La programación lineal es una técnica matemática que consiste en una serie de métodos y procedimientos que permiten resolver problemas de optimización.

El problema de PL, en su conjunto, puede verse como un modelo de asignación de recursos en el que se asignan recursos limitados (representados por restricciones al modelo), a actividades económicas (representadas por variables).

Inecuaciones lineales con 2 variables

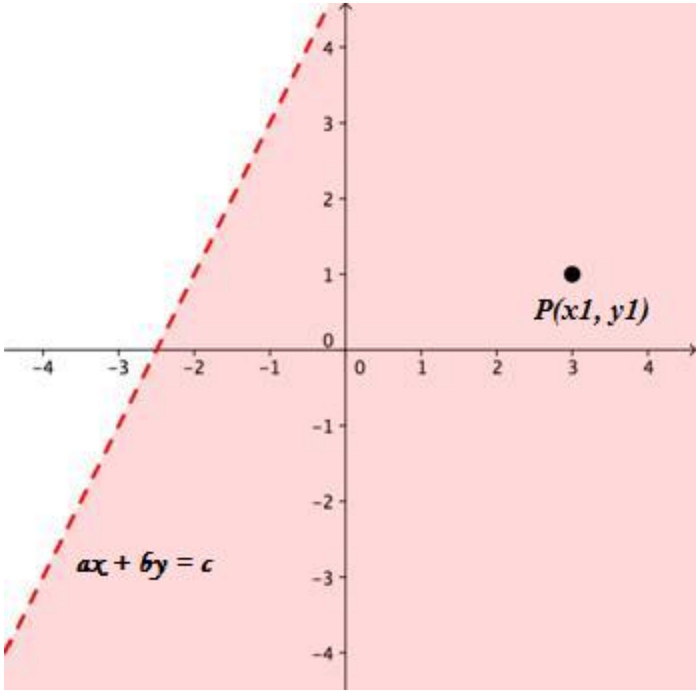
- Una inecuación lineal con 2 variables es una expresión de la forma:

$$ax + by \leq c$$

  - a, b y c son números reales, x e y las incógnitas.
  - Para resolver estas inecuaciones, hay que representar gráficamente en el plano la recta dada por la correspondiente ecuación lineal y marcar una de las dos regiones en que dicha recta divide al plano.

Inecuaciones lineales con 2 variables

- Para saber qué región del plano es solución, se toma un punto cualquiera que no pertenezca a la recta
- Para que dicho punto sea solución, se tendrá que cumplir la desigualdad, por lo que sustituimos en la inecuación inicial.
- **Se dice de esta manera que el semiplano que contiene al punto es solución (o no es si no lo contiene).**



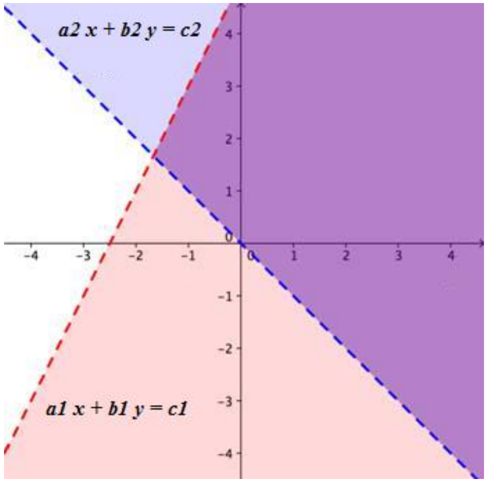
Ej: 2x + 3y >= 5

Sistema de inecuaciones lineales con 2 variables

Es un conjunto de inecuaciones del tipo anterior, y resolverlo consistirá en:

- Resolver gráficamente cada inecuación.
- Representar la solución en un mismo gráfico .
- La solución total será la parte común a todas las soluciones.

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \leq c_1 \\ a_2 x + b_2 y \leq c_2 \end{cases}$$



Problemas de optimización de una función sujeta a restricciones

- En un problema de PL de dos variables, se trata de optimizar (hacer máxima o mínima, según los casos) una función (llamada función objetivo) de la forma:

$$\mathbf{Z = A \,.\, X_1 + B \,.\, X_2}$$

- Sujeta a una serie de restricciones dadas mediante un sistema de inecuaciones lineales del tipo:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 \leq c_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 \leq c_2 \\ \vdots \\ a_m x_1 + b_m x_2 \leq c_m \end{cases}$$

Problemas de optimización de una función sujeta a restricciones

- Los puntos del plano que cumplen el sistema de desigualdades forman un conjunto convexo acotado (polígono) o no acotado, llamado región factible del problema.

- Todos los puntos de dicha región cumplen el sistema de desigualdades. Se trata de buscar, entre todos esos puntos, aquel o aquellos que hagan el valor de Z máximo o mínimo, según sea el problema.

- Los puntos de la región factible se denominan soluciones factibles.

- De todas esas soluciones factibles, aquellas que hacen óptima la función objetivo se llaman soluciones óptimas.

Ejemplo práctico: Enunciado

- Estudiemos el caso de una fábrica de pinturas para interiores y exteriores de casas para distribución mayorista.

- Se utilizan dos materiales básicos A y B, para producir las pinturas cuyas necesidades diarias y disponibilidades máximas se expresan en la siguiente tabla:

Enunciado (continuación)

	Tn de mat. Prima por Tn de pintura		
	Exterior	Interior	Disp Máx (Tn)
A	1	2	6
B	2	1	8

Enunciado (continuación)

- Un estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la pintura para exteriores en más de una tonelada. Así mismo, el estudio señala que la demanda máxima de pintura para interiores está limitada en dos toneladas diarias.
- El precio mayorista por tonelada es de $ 3000 para la pintura de exteriores y de $ 2000 para la pintura de interiores.
- ¿Cuánta pintura para exteriores e interiores debe producir la compañía todos los días para maximizar el ingreso bruto?

Construcción del Modelo Matemático

1. ¿Cuáles son las variables (incógnitas) del problema?

2. ¿Cuál es el objetivo que necesita alcanzarse para determinar la solución optima de entre todos los valores factibles de las variables?

3. ¿Qué restricciones deben imponerse a las variables a fin de satisfacer las limitaciones presentadas?

1- Variables

"pinturas para interiores y exteriores"

- X_E = toneladas de pintura para exteriores producidas diariamente
- X_I = toneladas de pintura para interiores producidas diariamente

2- Función objetivo

- “El precio mayorista por tonelada es de $ 3000 para la pintura de exteriores”:

$$3\ X_E$$

- “ y de $ 2000 para la pintura de interiores”:

$$2\ X_I$$

expresado en miles de unidades monetarias

2- Función objetivo (continuación)

- Bajo la suposición de que las ventas de pinturas para exteriores e interiores son independientes, el ingreso bruto total se convierte en la suma de los dos ingresos:

Maximizar $\mathbf{Z = 3\,X_E + 2\,X_I}$

3- Restricciones

Sobre el uso de materias primas:

- Uso de mat. primas en ambas pinturas <= disponibilidad máx. de mat. Primas

Según la tabla:

$$\mathbf{X_E + 2\,X_I <= 6} \text{ (mat. prima A)}$$

$$\mathbf{2\,X_E + X_I <= 8} \text{ (mat. prima B)}$$

3- Restricciones (continuación)

Sobre la demanda:

- La demanda diaria de pintura para interiores no puede ser mayor que la pintura para exteriores en más de una tonelada :

$$X_I <= X_E + 1 \quad \Rightarrow \quad X_I - X_E <= 1$$

- Demanda de pintura para interiores <= 2 tn. por día:

$$X_I <= 2$$

3- Restricciones (continuación)

- Una restricción implícita es que la cantidad que se produce de cada pintura no puede ser negativa.

(restricciones de no negatividad):

$$X_{I,}\ X_E >= 0$$

Modelo Matemático completo

Maximizar $Z = 3\,X_E + 2\,X_I$

Sujeto a:

$$
\begin{cases}
X_E + 2\,X_I <= 6 \\
2\,X_E + X_I <= 8 \\
-\,X_E + X_I <= 1 \\
X_I <= 2 \\
X_I >= 0 \\
X_E >= 0
\end{cases}
$$

Modelo Matemático Formal

Maximizar o minimizar z= CX

Sujeta a

AX=b

X≥0

donde b ≥ 0

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T, \quad C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Solución Gráfica

Objetivo: Graficar las soluciones factibles o espacio de soluciones, que satisfaga todas las restricciones en forma simultánea.

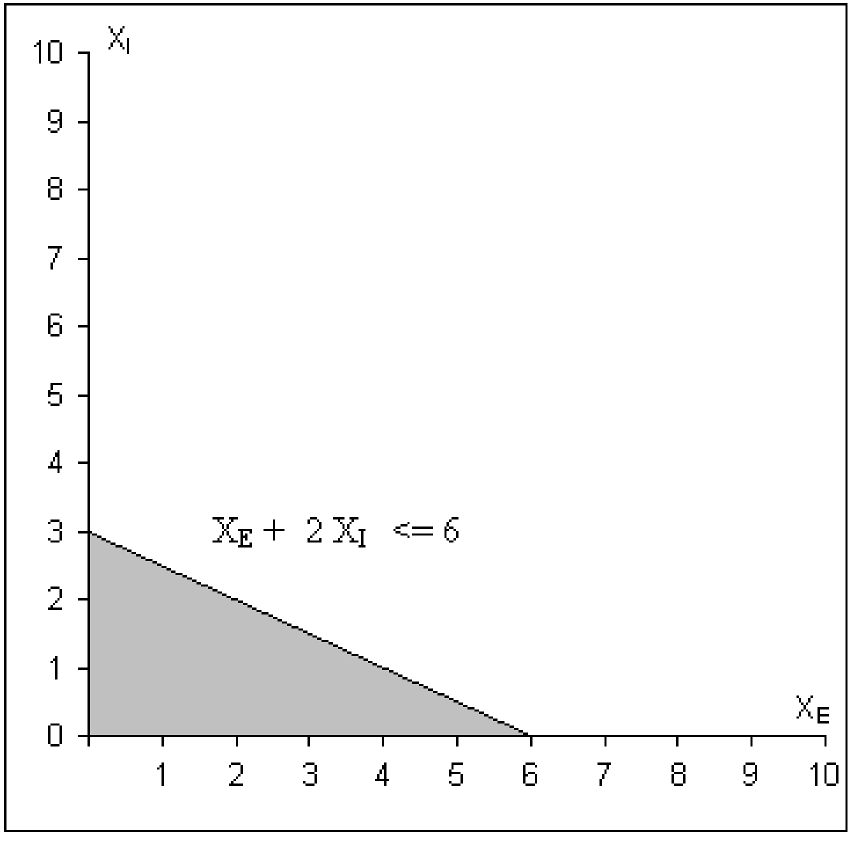
- Las restricciones de no negatividad hacen que todos los valores factibles pertenezcan al primer cuadrante.

Solución Gráfica (continuación)

- Para el resto de las restricciones se sustituyen las desigualdades por igualdades, con lo cual se produce la ecuación de una recta que es la que se grafica.

- La región a la cual pertenece una restricción se determina fácilmente verificando si (0,0) satisface la desigualdad, entonces la desigualdad será factible en el semiespacio que incluye al origen.

Solución Gráfica (continuación)



Cuando:

$X_E = 0$,

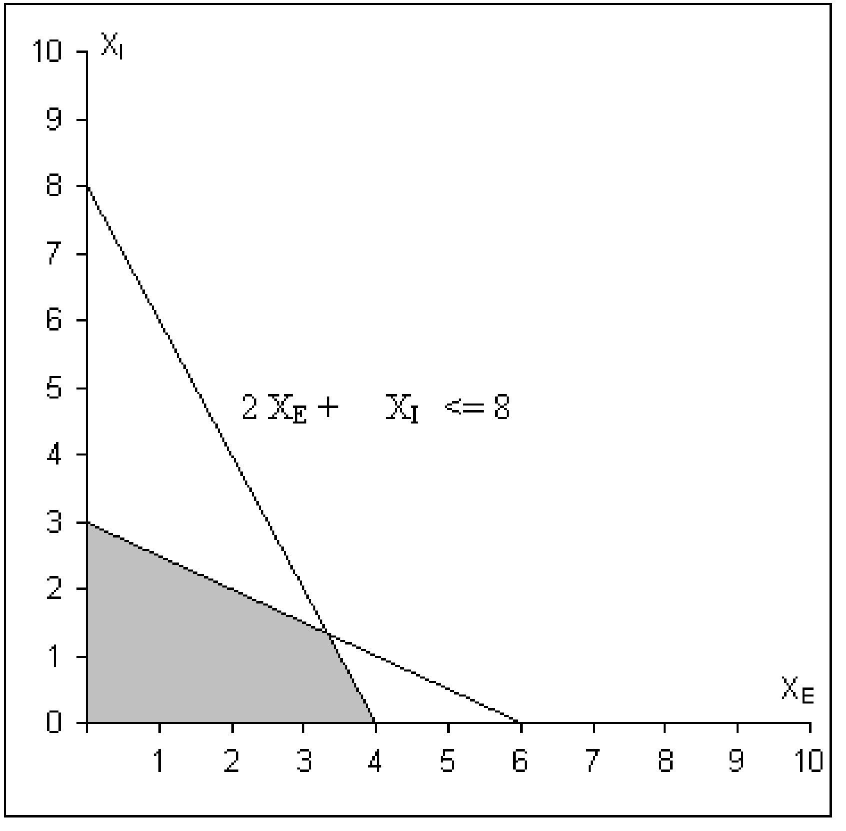
$X_I = 3$

Cuando:

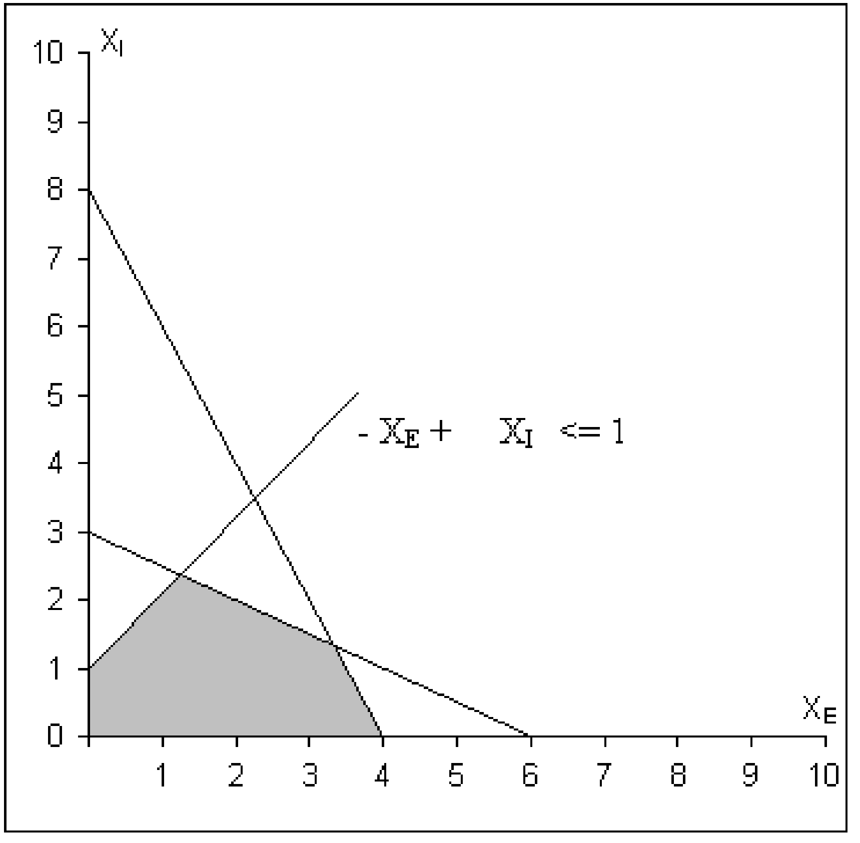
$X_I = 0$

$X_E = 6$,

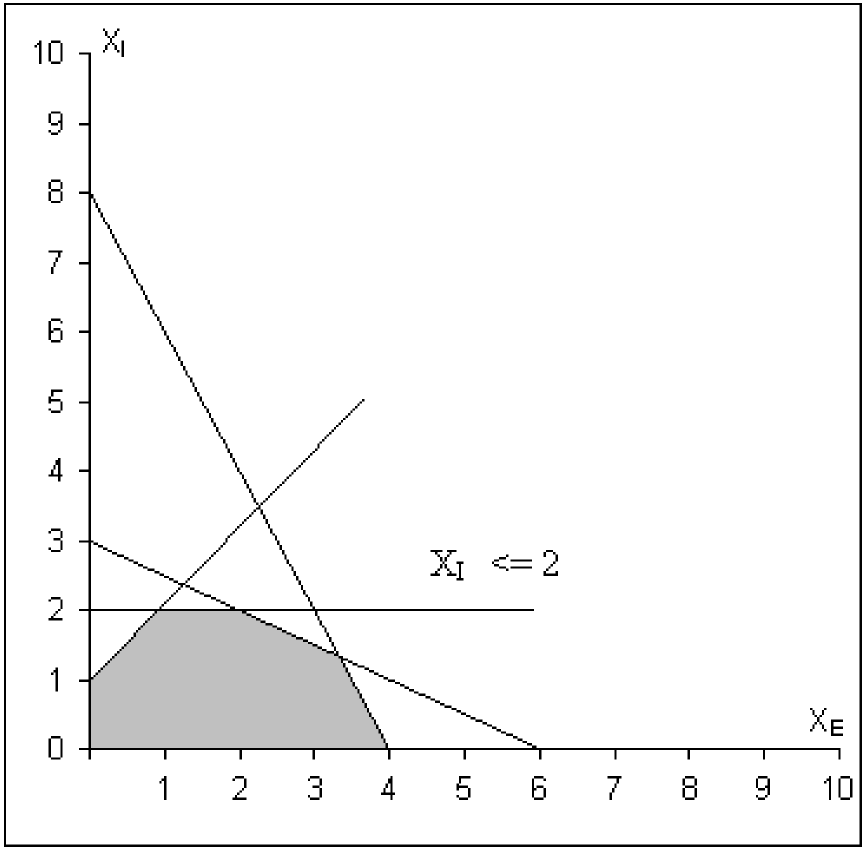
Solución Gráfica (continuación)



Solución Gráfica (continuación)



Solución Gráfica (continuación)

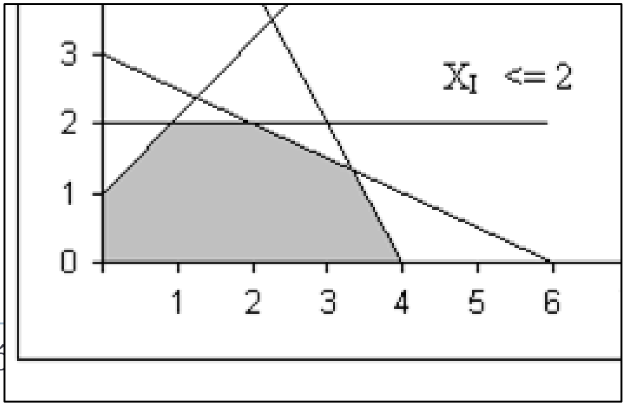


<u>Región factible</u>: es la región dada por las restricciones.

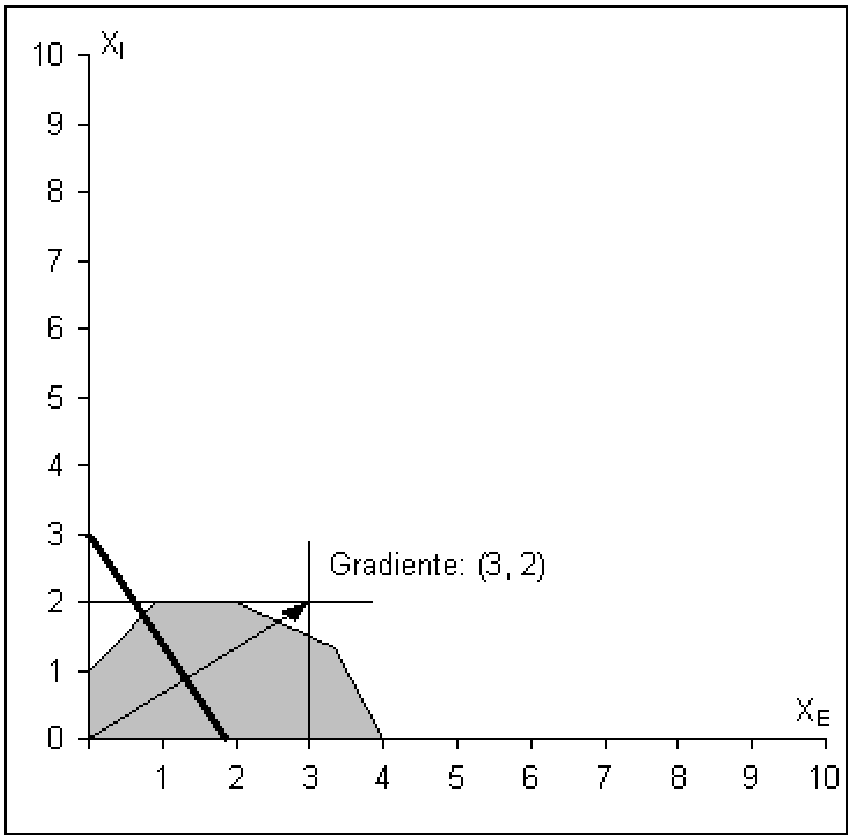
Problemas de optimización de una función sujeta a restricciones

Un problema de PL puede tener una, infinitas o ninguna solución:

- Si hay una única solución óptima, esta se encuentra en un vértice de la región factible
- Si hay infinitas soluciones óptimas, se encontrarán en un lado de la región factible.
- Es posible que no haya solución óptima, pues cuando el conjunto no es acotado, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.



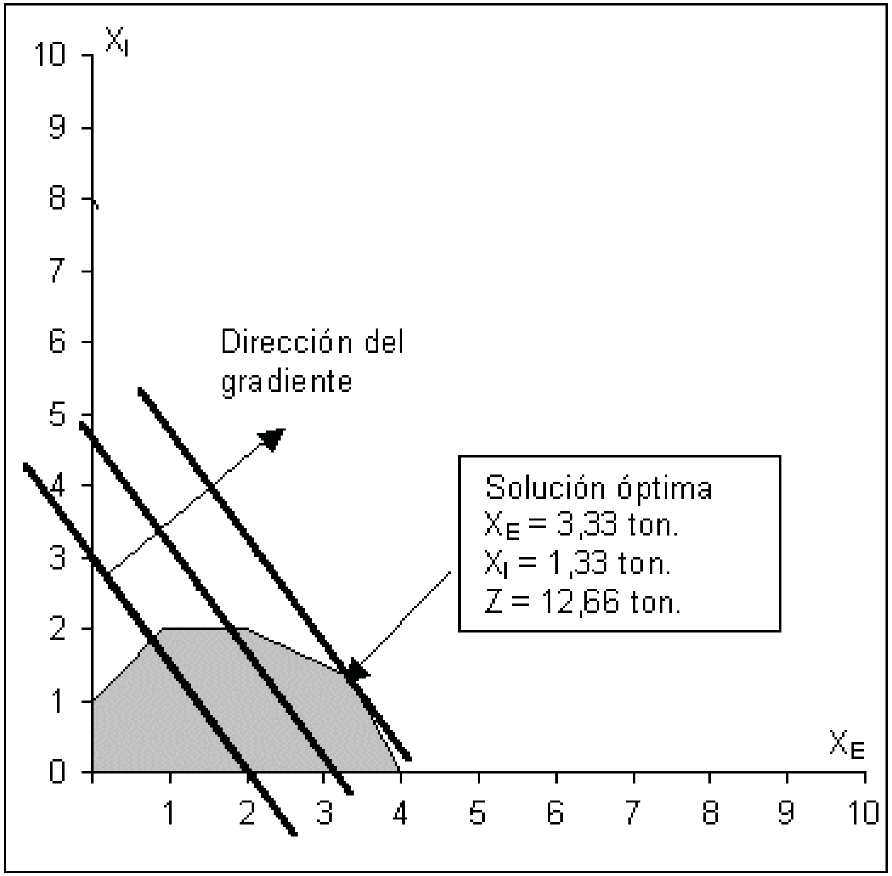
Solución Gráfica (continuación)



Gradiente: coeficientes del vector de costos.

Dirección del gradiente: la del máximo crecimiento de la función.

Solución Gráfica: Solución Óptima

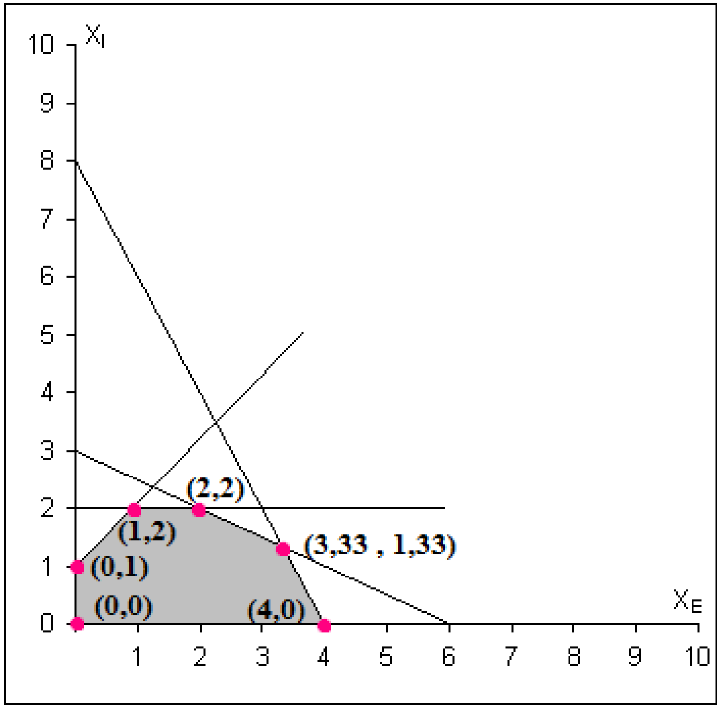


<u>Curvas de nivel</u>: puntos del dominio que hacen a una función constante.

El vector de costos es ortogonal a las curvas de nivel.

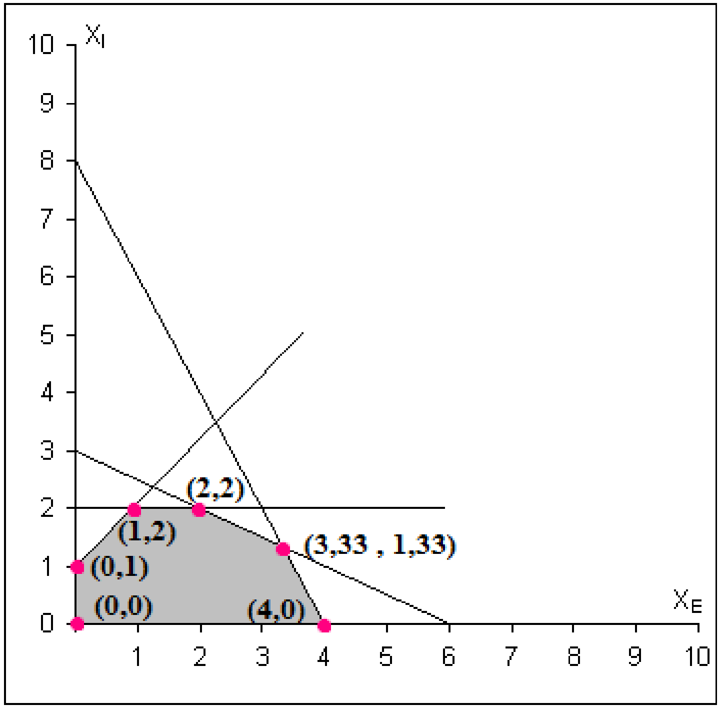
El último punto tocado en la región factible por las curvas de nivel será la **solución óptima** (única solución).

Solución Algebraica



Consiste, simplemente, en sustituir cada uno de los vértices de la región en la función objetivo. La Solución óptima vendrá dada por aquel que tome el mayor (o menor) valor.

Solución Algebraica (continuación)



Z = 3 XE + 2 XI

Sustituyendo:

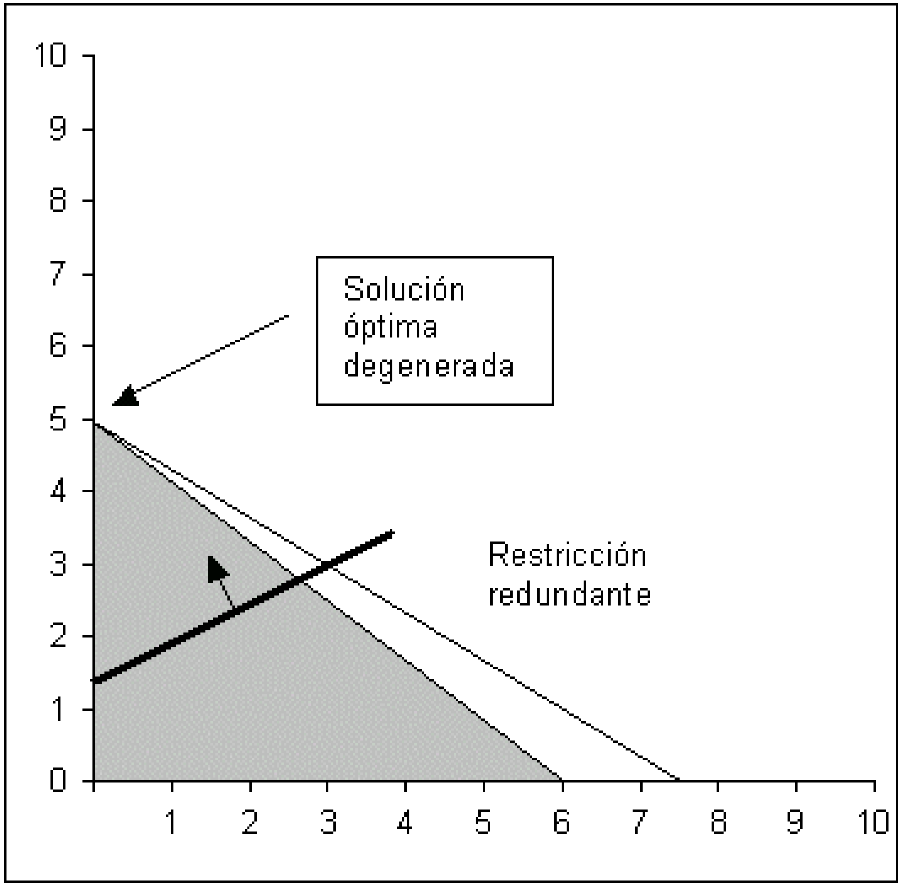
Z(0,0) = 0
Z(0,1) = 2
Z(1,2) = 7
Z(2,2) = 10
Z(3,33 ,1,33) = 12,65
Z(4,0) = 12

Solución Gráfica

- Válido para modelos de dos variables
- Pasos básicos:
  - Determinación del espacio de las soluciones factibles
  - Determinación de la solución óptima de entre todos los puntos en el espacio de solución factible:
    - ✓ Dibujar una recta con valor función objetivo constante (contorno)
    - ✓ Mover dicha recta de forma paralela en la dirección en la que se optimiza la función objetivo

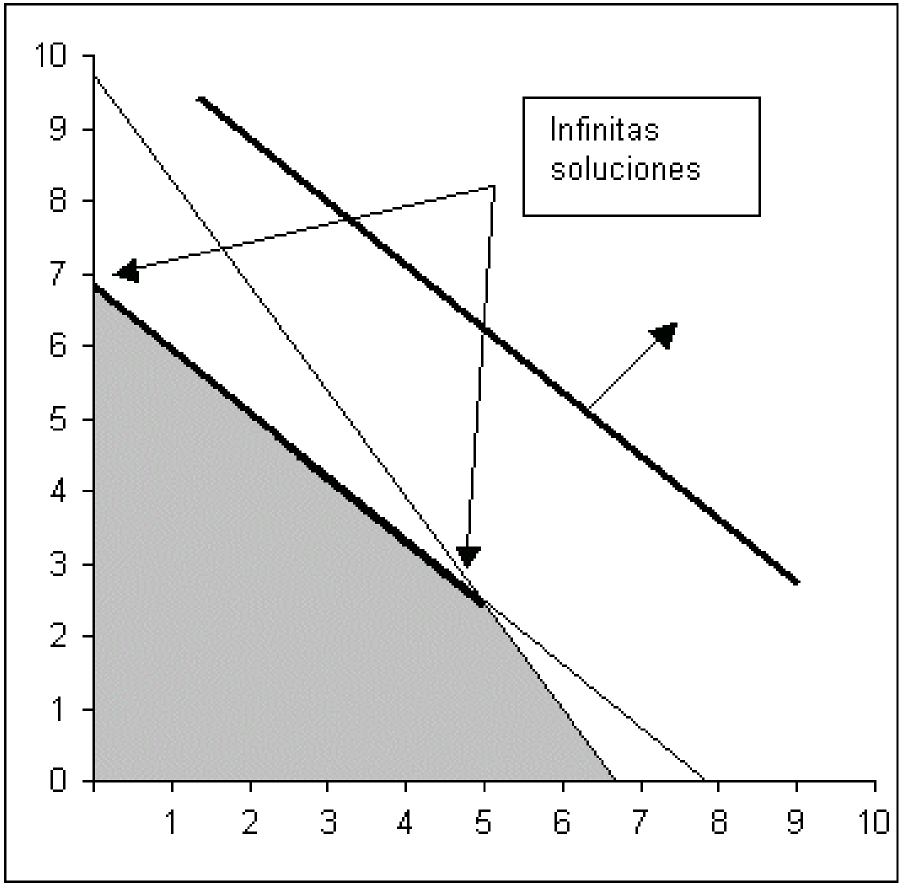
Ejemplos: Casos Extremos

Solución óptima degenerada



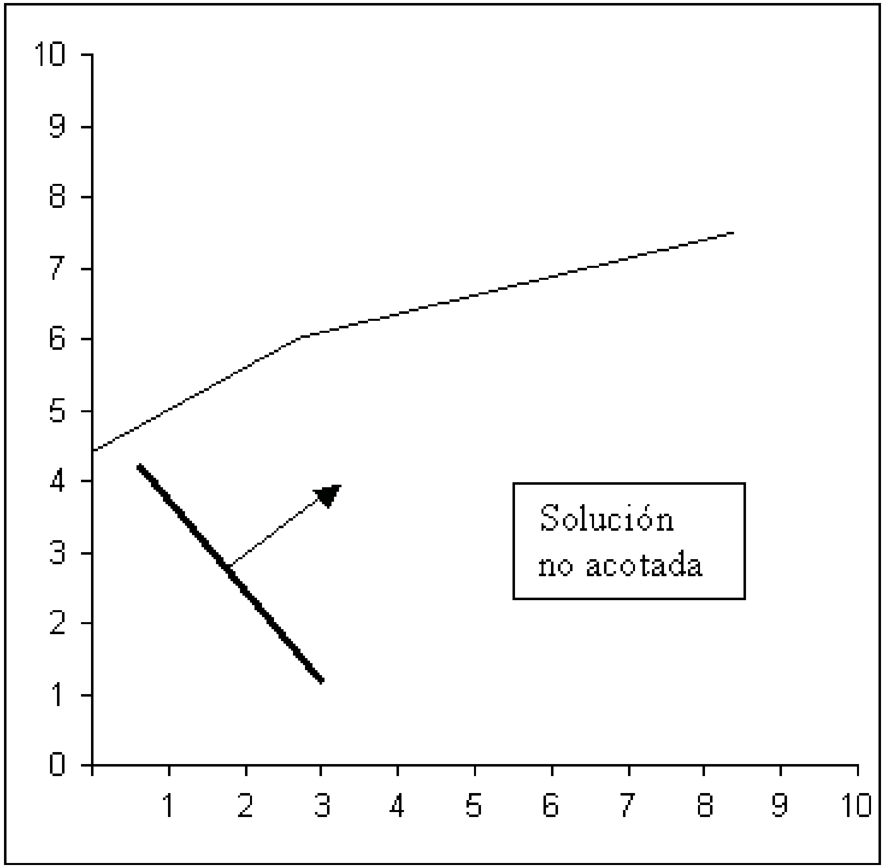
Ejemplos: Casos Extremos
(continuación)

Infinitas soluciones



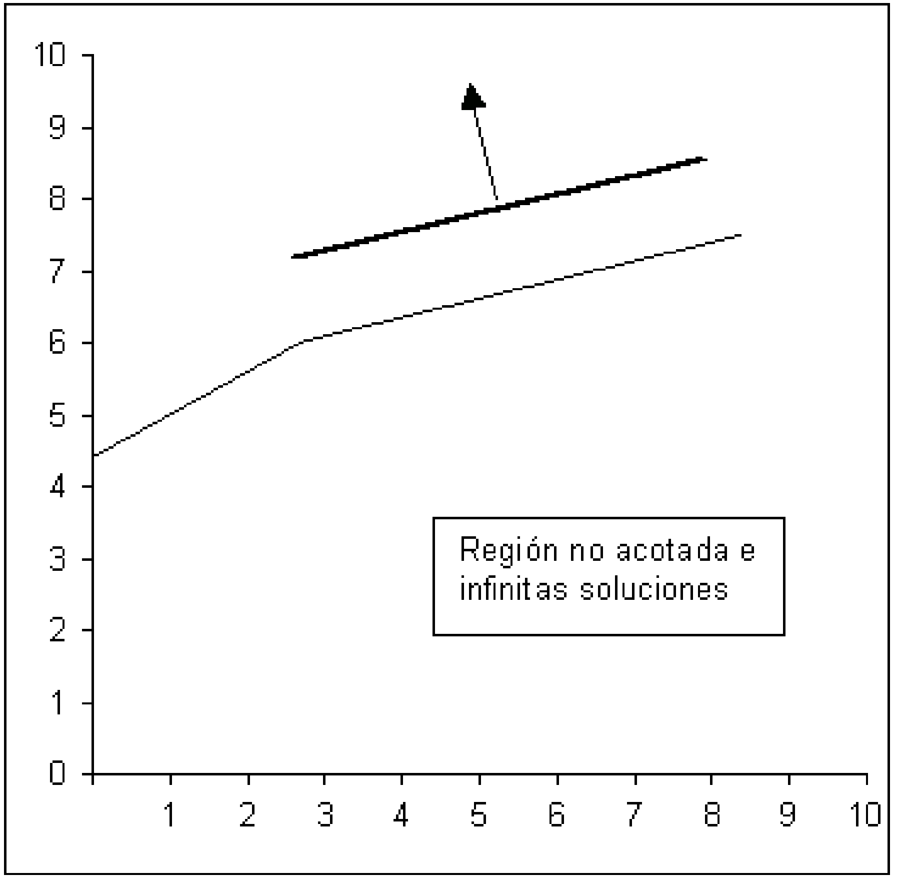
Ejemplos: Casos Extremos (continuación)

Solución no acotada



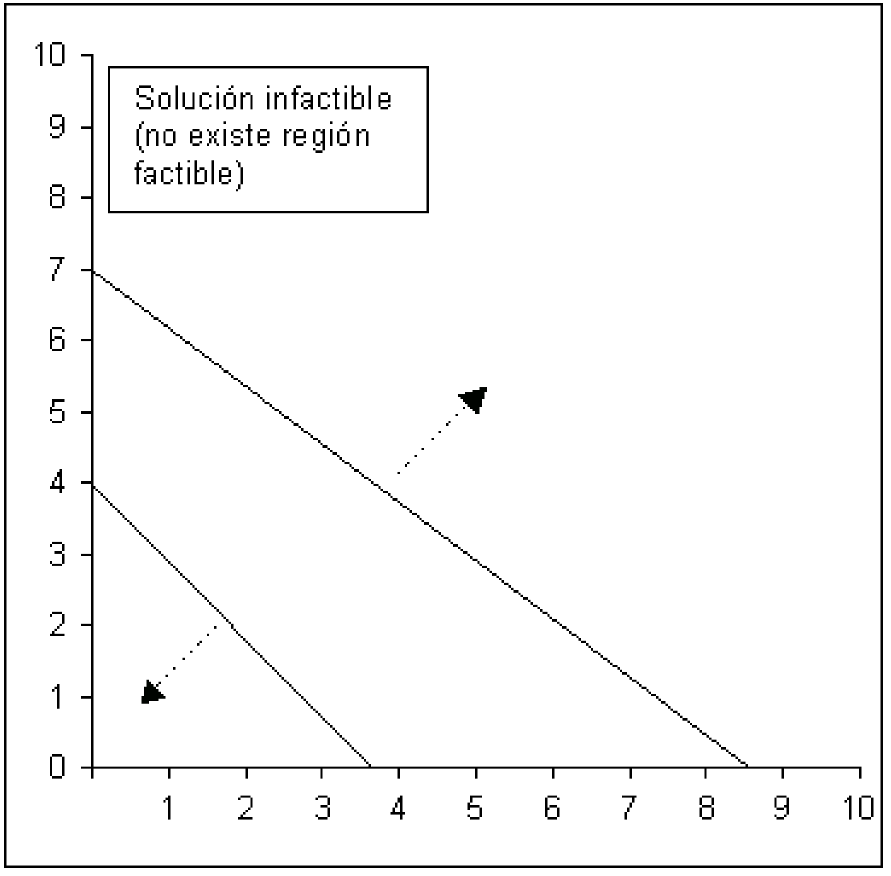
Ejemplos: Casos Extremos (continuación)

Región no acotada e infinitas soluciones



Ejemplos: Casos Extremos (continuación)

Solución infactible



Resumen

Presentamos un modelo sencillo de PL con dos variables de decisión que se puede resolver gráficamente. Si bien, en la realidad podemos encontrarnos con modelos de muchas variables y restricciones, este ejemplo ofrece una excelente oportunidad para entender cómo funciona el proceso de optimización de PL.